Lógica de Primeira Ordem

Ano Lectivo 2013/2014 - 1^o Semestre – Adaptado de http://aima.eecs.berkeley.edu/slides-tex/

Resumo

- ◊ Motivação para a Lógica de Primeira Ordem
- ◊ Sintaxe e semântica da LPO
- ◊ Engenharia do conhecimento em LPO
- ◊ Exemplos de representação em LPO

Prós e contras da lógica proposicional

+ A lógica proposicional é *declarativa*: a sintaxe permite expressar factos

+ A lógica proposicional permite representar informação parcial, disjuntiva e negativa (contrariamente à maioria das estruturas de dados e bases de dados)

+ A lógica proposicional é *composicional*: o significado de $B_{1,1} \wedge P_{1,2}$ é obtido compondo o significado de $B_{1,1}$ e de $P_{1,2}$

+ O significado da lógica proposicional é *independente do contexto*
(contrariamente à linguagem natural, em que o significado depende do contexto)

- A lógica proposicional tem um poder expressivo muito limitado
(contrariamente à linguagem natural)
E.g., não se consegue dizer "buracos provocam brisa em casas adjacentes" a não ser que se escreva uma proposição para cada casa do mundo

Lógica de Primeira Ordem

Enquanto que a lógica proposicional assume que o mundo contém *factos*, a lógica de primeira ordem (tal como a linguagem natural) assume que o mundo pode conter

- Objectos: pessoas, casas, números, teorias, Gil, cores, jogos de futebol, guerras, séculos . . .
- Relações: vermelho, redondo, errado, primo, arranha-céus . . ., irmão de, maior do que, dentro de, parte de, tem cor, ocorreu após, tem, vende, . . .
- Funções: pai de, melhor amigo, prolongamento de, um a mais do que, princípio de . . .

Outras designações

A lógica de primeira ordem (LPO) é também conhecida através de outras designações:

♢ Cálculo de Predicados de Primeira Ordem (first-order predicate calculus)

♢ Cálculo de predicados de ordem inferior (lower predicate calculus)

♢ Lógica de Predicados (predicate logic)

♢ Linguagem de lógica de primeira ordem (language of first-order logic)

Lógicas em geral

Linguagem	Compromisso Ontológico (o que existe no mundo)	Compromisso Epistemológico (o que o agente acredita sobre os factos)
Lógica Proposicional	factos	verdadeiro/falso/desconhecido
Lógica de Primeira Ordem	factos, objectos, relações	verdadeiro/falso/desconhecido
Lógica Temporal	factos, objectos, relações, tempos	verdadeiro/falso/desconhecido
Teoria da Probabilidade	factos	grau de crença $\in [0, 1]$
Lógica Vaga/Difusa	graus de verdade $\in [0, 1]$	intervalo conhecido de valores

Existem inúmeras lógicas, variando com o seu domínio de aplicação:

◊ Lógicas terminológicas

◊ Lógica de primeira ordem tipificada

◊ Lógica de segunda ordem

◊ Lógicas de ordem superior

◊ Lógica de primeira ordem intuicionista

Sintaxe da LPO: Elementos Básicos

O vocabulário da LPO é constituído pelos seguintes elementos:

1. Símbolos de constantes de predicados de aridade ≥ 1	$Brother$, $>$, $Irmao$, $Gato$, $\ldots$
2. Símbolos de constantes de objectos	$KingJohn$, 2, UNL, $Portugal$, $Benfica, Reitor, \ldots$
3. Símbolos de constantes de funções	$Sqrt$, $LeftLegOf, \ldots$
4. Um número infinito de variáveis	x, y, a, $b, \ldots$
5. Conectivos lógicos	$\wedge$ $\vee$ $\neg$ $\Rightarrow$ $\Leftrightarrow$
6. Quantificadores	$\forall$ $\exists$
7. Parêntesis esquerdo, direito e vírgula	( ) ,
8. Igualdade	$=$

A lógica de primeira ordem não atribui qualquer interpretação pré-definida aos seus símbolos não lógicos: constantes de predicados, objectos e funções

Regras de formação: termos

O poder expressivo adicional da lógica de primeira ordem advém da sua possibilidade de referir objectos no domínio de discurso. Sintacticamente, os termos da lógica de primeira ordem denotam ess es objectos:

Um termo é definido recursivamente de acordo com as seguintes regras:

♢ Uma constante de objecto é um termo (denotando um objecto concreto do domínio de discurso)

♢ Uma variável é um termo (denotando um objecto "anónimo" do domínio de discurso)

♢ Qualquer expressão $f(t_1, \ldots, t_n)$ é um termo, em que os seus $n \geq 1$ argumentos são termos e f é um símbolo de função com aridade n. Também é designado por expressão funcional.

♢ Nada mais é um termo.

Exemplos de termos

Objectos

- 1, 1.54, i, e, 12e40, pi, -3, MMVII, 0x20
- Portugal, UNL, Benfica
- Tweety, Diabo, Bem, Unicórnio
- Abc, Xpto123, Key123, 'Uma cadeia de caracteres muito longa'

Expressões funcionais

- Exp(1.0), Exp(Mult(I,Pi)), +(x,0,0.35), 0 * x (notação infixa), $Log(x, 2) + Ln(E)$
- $Idade(Carlos,$'17-04-2007 10:23:00 GMT'$)$
- $Peso(Manuel)$
- 'C' & '++'
- Mãe(Árbitro(Jogo(Sporting,Benfica,Época200607))

Frases Atómicas: (Átomos)

As frases ou fórmulas atómicas são construídas a partir dos símbolos de predicados e termos na linguagem:

♢ Se P é um símbolo constante de predicado de aridade n e cada $termo_i(1 \leq i \leq n)$ são termos, então $P(a_1, \ldots, a_n)$ é uma fórmula atómica.

♢ Se a linguagem inclui igualdade, então $termo_1 = termo_2$ é uma fórmula atómica.

Exemplos de frases atómicas

$Brother(KingJohn, RichardTheLionheart)$

$> (Length(LeftLegOf(Richard)), Length(LeftLegOf(KingJohn)))$

$Exp(I * Pi) + 1 = 0$

$Matriculado(s123, inf, ciclo1)$

$0 + x = x$

$Chove$

$Arco(a1, a2)$

Fórmulas ou frases bem formadas

As fórmulas bem formadas (fbf) definem-se recursivamente através das seguintes regras:

◇ Qualquer frase atómica é uma fórmula bem formada (fbf)

◇ Se ϕ é uma fórmula bem formada então $\neg\phi$ é uma fbf.

◇ Se ϕ and ν são fbfs então $(\phi \wedge \nu)$, $(\phi \vee \nu)$, $(\phi \Rightarrow \nu)$ e $(\phi \Leftrightarrow \nu)$ também são fbfs.

◇ Se ϕ é uma fbf e x é uma variável então $\forall x \;\; \phi$ e $\exists x \;\; \phi$ é uma fbf.

◇ Nada mais é uma fbf.

Frases complexas são construídas a partir de frases atómicas utilizando os conectivos e os quantificadores.

Exemplos de fórmulas bem formadas

$$Sibling(KingJohn, Richard) \Rightarrow Sibling(Richard, KingJohn)$$

$$>(1,2) \lor \leq(1,2)$$

$$>(1,2) \land \neg>(1,2)$$

$$\forall x \;\; \forall y \;\; (x + y = y + x)$$

$$\forall x \;\; \forall y \;\; \exists z \;\; (x < y \;\Rightarrow\; (x < z \land z < y))$$

$$\forall y \;\; \exists x \;\; Progenitor(x, y)$$

$$\forall x \;\; (Humano(x) \;\Leftrightarrow\; (Mulher(x) \lor Homem(x)))$$

$$\exists x \;\; (Humano(x) \land \neg\exists y \;\; Progenitor(x, y))$$

Variáveis livres e ligadas

♢ Se ϕ é uma fórmula atómica então x é livre sse x ocorre em ϕ.

♢ x é livre em $\neg\phi$ sse x é livre em ϕ.

♢ x é livre em $(\phi \wedge \nu)$, $(\phi \vee \nu)$, $(\phi \;\Rightarrow\; \nu)$, $(\phi \;\Leftrightarrow\; \nu)$ sse x é livre em ϕ ou ν.

♢ x é livre em $\forall\, y \;\; \phi$ ou $\exists\, y \;\; \phi$ sse $x \neq y$ e x é livre em ϕ.

De forma semelhante define-se a noção de variável ligada (aquelas que ocorrem no âmbito de algum quantificador).

Uma variável pode estar livre e ligada na mesma fórmula:

$$(\forall\, x \;\; (R(x,y) \;\Rightarrow\; P(x)) \wedge \forall\, y \;\; (\neg R(x,y) \vee \forall\, x \;\; P(x)))$$

Nota: Qualquer fórmula pode ser reescrita numa fórmula equivalente em que as variáveis livres e ligadas são disjuntas.

Semântica da Lógica de Primeira Ordem

As fbfs são avaliadas em interpretações (ou estruturas) constituídas por um par $M =< D, I >$ em que D é um conjunto não vazio (o domínio de discurso) e I uma função de interpretação.

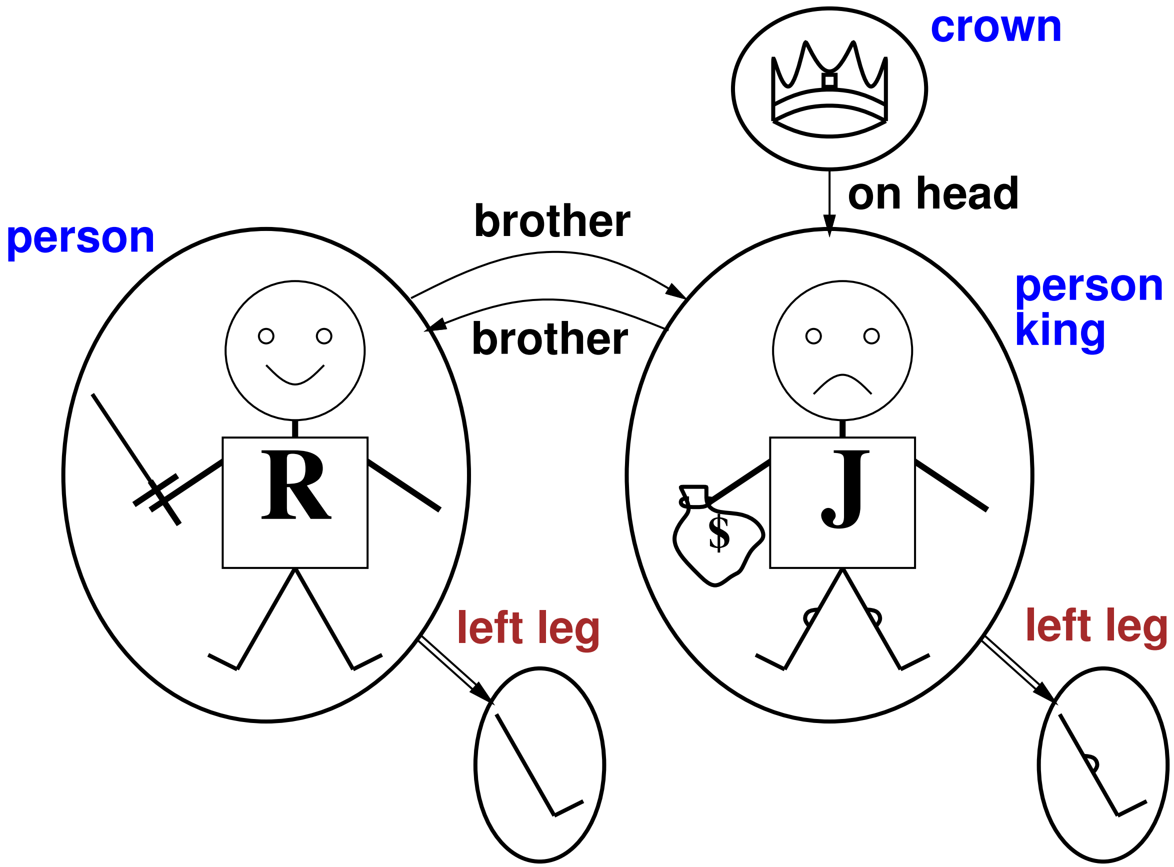
O domínio de discurso contém ≥ 1 objectos (elementos do domínio) e relações entre eles

A função de interpretação especifica referentes para
- *símbolos de constante* $\rightarrow$ objectos $\quad I(c) \in D$ ou
- *símbolos de predicado* $\rightarrow$ relações $\quad I(P) \subseteq D^n$ para predicado P/n
- *símbolos de função* $\rightarrow$ relações funcionais $\quad I(f) : D^n \rightarrow D$

Uma frase atómica $predicado(termo_1, \ldots, termo_n)$ é verdade sse os objectos referidos por $termo_1, \ldots, termo_n$ se encontram na relação referida por $predicado$

Quando temos fórmulas com variáveis livres é necessário considerar atribuições de variáveis que mapeiam variáveis em elementos do domínio de discurso

Interpretações de LPO: Exemplo



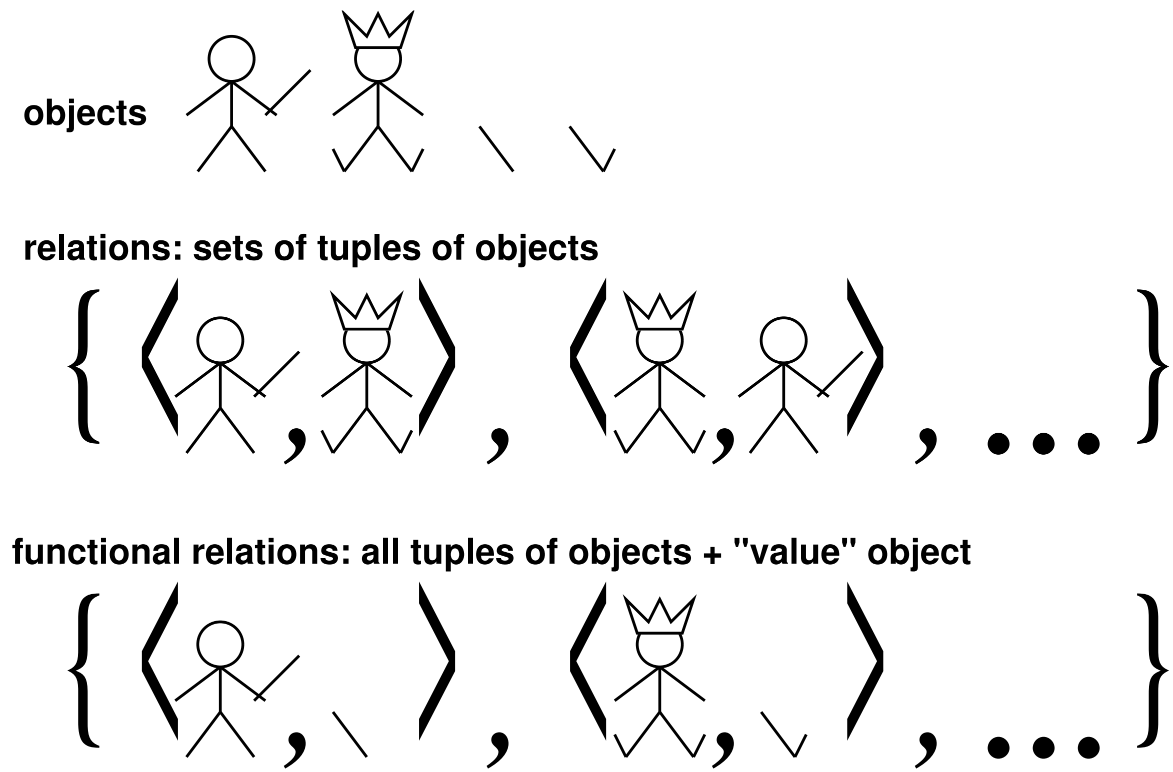
Interpretações para a LPO: Imensas!

Para alguns casos restritos, podemos *tentar* enumerar as interpretações para um dado vocabulário de uma KB:

Para cada número de elementos no domínio n de 1 até ∞
    Para cada predicado k-ário P_k no vocabulário
        Para cada relação k-ária possível com n objectos
            Para cada símbolo de constante C no vocabulário
                Para cada escolha de referente para C em n objectos ...

A obtenção das conclusões lógicas por enumeração não vai ser nada fácil!

Interpretações para a LPO: Imensas!



Denotação de um termo numa interpretação

Seja t um termo e s uma atribuição de variáveis numa estrutura M.

A denotação $t_{\mathbf{M}}[s]$ de t em M é definida recursivamente:

♢ $x_{\mathbf{M}}[s] = s(x)$ para uma variável x.

♢ $c_{\mathbf{M}}[s] = I(c)$ para uma constante c.

♢ $f(t_1, \ldots, t_n)_{\mathbf{M}}[s] = I(f)\,((t_1)_{\mathbf{M}}[s], \ldots, (t_n)_{\mathbf{M}}[s])$

Relação de satisfação

A noção de verdade (relativa) em LPO é capturada através da relação de satisfação.

Seja M uma interpretação e s uma atribuição de variáveis em M.

$M, s \models t_1 = t_2$ sse $(t_1)_{\mathbf{M}} = (t_2)_{\mathbf{M}}$
$M, s \models P(t_1, \ldots, t_n)$ sse $((t_1)_{\mathbf{M}}, \ldots, (t_n)_{\mathbf{M}}) \in I(P)$
$M, s \models \neg\phi$ sse não é o caso $M, s \models \phi$
$M, s \models (\phi \wedge \nu)$ sse $M, s \models \phi$ e $M, s \models \nu$
$M, s \models (\phi \vee \nu)$ sse $M, s \models \phi$ ou $M, s \models \nu$
$M, s \models (\phi \ \Rightarrow \ \nu)$ sse não é o caso $M, s \models \phi$ ou $M, s \models \nu$
$M, s \models \forall x \ \ \phi$ sse $M, s' \models \phi$, para toda a atribuição de variáveis s'
idêntica a s excepto possivelmente na variável x
$M, s \models \exists x \ \ \phi$ sse $M, s' \models \phi$, para alguma de atribuição de variáveis s'
idêntica a s excepto possivelmente na variável x

Consequência Lógica

$\diamondsuit$ Uma fórmula ϕ é satisfazível se existir uma interpretação M e uma atribuição de variáveis s tal que $M, s \models \phi$.

$\diamondsuit$ Um conjunto de fbfs Γ é satisfazível se existir uma intepretação M e uma atribuição de variáveis s tal que $M, s \models \psi$ para toda a fórmula ψ de Γ. Se Γ for um conjunto fechado de fórmulas diz-se que M é um modelo de Γ.

$\diamondsuit$ Se Γ é um conjunto de sentenças então Uma fórmula ϕ é logicamente verdadeira ou válida se $M, s \models \phi$ para toda a interpretação M e atribuição de variáveis s (representado por $\models \phi$).

$\diamondsuit$ Seja Γ um conjunto de fórmulas bem formadas e ϕ uma fbf. Diz-se que ϕ é uma consequência de Γ sse para toda a interpretação M e atribuição de variáveis s se $M, s \models \psi$ para toda a fórmula ψ de Γ então $M, s \models \phi$. Representa-se este facto através de $\Gamma \models \phi$.

Grupos (Abelianos)

Os grupos são definidos pelos seguintes axiomas, num vocabulário contendo uma constante e, um símbolo de função unário $^{-1}$ e um símbolo de função binário $\odot$:

$$\forall x \;\; e \odot x = x \wedge x \odot e = x$$

$$\forall x \;\; x^{-1} \odot x = e \wedge x \odot x^{-1} = e$$

$$\forall x \;\; \forall y \;\; \forall z \;\; (x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$$

Se o grupo for comutativo diz-se que é abeliano em homenagem a Niels Henrik Abel

$$\forall x \;\; \forall y \;\; x \odot y = y \odot x$$

Indique uma interpretação M que satisfaça estes axiomas.

Modelos para a teoria dos grupos abelianos

Exemplos típicos de grupos abelianos:

♢ Inteiros com adição

♢ Números reais sem zero com multiplicação

Algumas consequências lógicas da teoria de grupos:

- Um grupo tem exactamente um único elemento neutro.
- Todo o elemento só tem um inverso.
- Para todo a e b existe um único x tal que $a \odot x = b$.
- Para todo o a, tem-se que $(a^{-1})^{-1} = a$.
- Para todo o a e b $(a \odot b)^{-1} = b^{-1} \odot a^{-1}$

A teoria dos grupos abelianos é decidível!

Quantificação Universal

$\forall \langle variáveis \rangle \;\; \langle frase \rangle$

Toda a gente na UNL é inteligente:
$\forall x \;\; Em(x, UNL) \Rightarrow Inteligente(x)$

$\forall x \;\; P$ é verdade num dado modelo e dada interpretação nesse modelo sse P é verdade para todo o objecto x do modelo (i.e. x percorre todos os objectos possíveis do modelo)

Pode ser entendido como a conjunção das instanciações de P

$$
\begin{aligned}
& Em(ReiAfonsoI, UNL) \Rightarrow Inteligente(ReiAfonsoI) \\
\wedge\ & Em(Ana, UNL) \Rightarrow Inteligente(Ana) \\
\wedge\ & Em(UNL, UNL) \Rightarrow Inteligente(UNL) \\
\wedge\ & \ldots
\end{aligned}
$$

Erro comum a evitar

Normalmente, $\Rightarrow$ é o o conectivo principal de $\forall$

Erro comum: utilizar $\land$ como conectivo principal de $\forall$:

$$\forall\, x \;\; Em(x, UNL) \land Inteligente(x)$$

significa "Toda a gente está na UNL e toda a gente é inteligente"

Quantificação Existencial

$\exists \langle variáveis \rangle \;\; \langle frase \rangle$

Alguém em Almada é inteligente:
$\exists x \;\; Em(x, Almada) \wedge Inteligente(x)$

$\exists x \;\; P$ é verdade num dado modelo e dada interpretação nesse modelo sse
P é verdade para algum objecto x possível do modelo

Pode ser entendido como a disjunção das instanciações de P

$$
\begin{array}{ll}
 & Em(ReiAfonsoI, Almada) \wedge Inteligente(ReiAfonsoI) \\
\vee & Em(Ana, Almada) \wedge Inteligente(Ana) \\
\vee & Em(Almada, Almada) \wedge Inteligente(Almada) \\
\vee & \ldots
\end{array}
$$

Outro erro comum a evitar

Normalmente, $\wedge$ é o conectivo principal de $\exists$

Erro comum: utilizar $\Rightarrow$ como conectivo principal de $\exists$:

$$\exists\, x \;\; Em(x, Almada) \Rightarrow Inteligente(x)$$

é verdade se existir alguém que não está em Almada!

Propriedades dos quantificadores

$\forall x\ \forall y$ é o mesmo que $\forall y\ \forall x$ (porquê??)

$\exists x\ \exists y$ é o mesmo que $\exists y\ \exists x$ (porquê??)

$\exists x\ \forall y$ não é o mesmo que $\forall y\ \exists x$

$\exists x\ \forall y\ Ama(x, y)$
"Existe alguém que ama toda a gente no mundo"

$\forall y\ \exists x\ Ama(x, y)$
"Toda a gente no mundo é amada pelo menos por uma pessoa"

Dualidade dos quantificadores: cada um pode ser expresso utilizando o outro

$\forall x\ Gosta(x, Gelado) \qquad \neg\exists x\ \neg Gosta(x, Gelado)$

$\exists x\ Gosta(x, Brócolos) \qquad \neg\forall x\ \neg Gosta(x, Brócolos)$

Equivalências importantes da LPO

$$\neg\forall x\, P(x) \Leftrightarrow \exists x\, \neg P(x)$$

$$\neg\exists x\, P(x) \Leftrightarrow \forall x\, \neg P(x)$$

$$\forall x\, \forall y\, P(x,y) \Leftrightarrow \forall y\, \forall x\, P(x,y)$$

$$\exists x\, \exists y\, P(x,y) \Leftrightarrow \exists y\, \exists x\, P(x,y)$$

$$\forall x\, P(x) \land \forall x\, Q(x) \Leftrightarrow \forall x\, (P(x) \land Q(x))$$

$$\exists x\, P(x) \lor \exists x\, Q(x) \Leftrightarrow \exists x\, (P(x) \lor Q(x))$$

$P \land \exists x\, Q(x) \Leftrightarrow \exists x\, (P \land Q(x))$ com x não livre em P

$P \lor \forall x\, Q(x) \Leftrightarrow \forall x\, (P \lor Q(x))$ com x não livre em P

Implicações importantes da LPO

$\exists x \, \forall y \, P(x,y) \Rightarrow \forall y \, \exists x \, P(x,y)$

$\forall x \, P(x) \lor \forall x \, Q(x) \Rightarrow \forall x \, (P(x) \lor Q(x))$

$\exists x \, (P(x) \land Q(x)) \Rightarrow \exists x \, P(x) \land \exists x \, Q(x)$

$\exists x \, P(x) \land \forall x \, Q(x) \Rightarrow \exists x \, (P(x) \land Q(x))$

$\forall x \, P(x) \Rightarrow P(c)$ se c é uma variável, então não deve ocorrer quantificada em $P(x)$

$P(c) \Rightarrow \exists x \, P(x)$ x não deve ocorrer livre em $P(c)$

Alguns Exemplos

Irmãos são amigos

Alguns Exemplos

Irmãos são amigos

$\forall\, x, y \;\; Irm\tilde{a}o(x, y) \;\Rightarrow\; Amigo(x, y)$.

A "Amizade" é simétrica

Alguns Exemplos

Irmãos são amigos

$\forall\, x, y \;\; Irmão(x, y) \;\Rightarrow\; Amigo(x, y)$.

A "Amizade" é simétrica

$\forall\, x, y \;\; Amigo(x, y) \;\Leftrightarrow\; Amigo(y, x)$.

A mãe de alguém é o seu progenitor feminino

Alguns Exemplos

Irmãos são amigos

$\forall\, x, y \;\; Irmão(x, y) \;\Rightarrow\; Amigo(x, y)$.

A “Amizade” é simétrica

$\forall\, x, y \;\; Amigo(x, y) \;\Leftrightarrow\; Amigo(y, x)$.

A mãe de alguém é o seu progenitor feminino

$\forall\, x, y \;\; M\tilde{a}e(x, y) \;\Leftrightarrow\; (Feminino(x) \wedge Progenitor(x, y))$.

Um primo direito é um filho de um dos irmãos dos pais

Alguns Exemplos

Irmãos são amigos

$\forall\, x, y \;\; Irm\tilde{a}o(x, y) \;\Rightarrow\; Amigo(x, y)$.

A "Amizade" é simétrica

$\forall\, x, y \;\; Amigo(x, y) \;\Leftrightarrow\; Amigo(y, x)$.

A mãe de alguém é o seu progenitor feminino

$\forall\, x, y \;\; M\tilde{a}e(x, y) \;\Leftrightarrow\; (Feminino(x) \wedge Progenitor(x, y))$.

Um primo direito é um filho de um dos irmãos dos pais

$\forall\, x, y \quad PrimoDireito(x, y) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, p, ps \quad Progenitor(p, x) \wedge Irm\tilde{a}o(ps, p) \wedge Progenitor(ps, y)$

Igualdade

$termo_1 = termo_2$ é verdade numa dada interpretação
sse $termo_1$ e $termo_2$ se referem ao mesmo objecto

E.g., $1 = 2$ e $\forall\, x \;\; \times(Sqrt(x), Sqrt(x)) = x$ são satisfazíveis
$2 = 2$ é válida

E.g., definição de $Irmão$ em termos de $Progenitor$:

$$\forall\, x, y \;\; Irmão(x, y) \;\Leftrightarrow\; [\neg(x = y) \wedge \exists\, m, f \;\; \neg(m = f) \wedge Progenitor(m, x) \wedge Progenitor(f, x) \wedge Progenitor(m, y) \wedge Progenitor(f, y)]$$

Lógicas de Descrição ou Terminológicas

Os resultados de indecidibilidade da lógica de primeira ordem motivarem a investigação de subconjuntos decidíveis "interessantes" da LPO.

A lógica terminológica de base é a lógica $\mathcal{ALC}$ (Attributive Logic with Complements) com a seguinte sintaxe (repare-se na ausências explícita de variáveis).

Sintaxe	Significado	Tradução LPO
$\bot$	conjunto vazio de indivíduos	$\bot$
A	Conceito simples: $Pessoa$	$Pessoa(x)$
$\neg C$	Negação de um conceito: $\neg Homem$	$\neg Homem(x)$
$C \sqcap D$	Conjunção: $Mulher \sqcap Estudante$	$Mulher(x) \wedge Estudante(x)$
$C \sqcup D$	Disjunção: $Bonito \sqcup Rico$	$Bonito(x) \vee Rico(x)$
$\exists R.C$	Algum: $Mulher \sqcap \exists progenitor.Pessoa$	$Mulher(x) \wedge$ $\exists_y\, (progenitor(x,y) \wedge Pessoa(y))$
$\forall R.C$	Qualquer: $Mulher \sqcap \forall progenitor.Homem$	$Mulher(x) \wedge$ $\forall_y\, (progenitor(x,y) \Rightarrow Homem(y))$

A Web Semântica

As lógicas de descrição estão a ser utilizadas para modelar informação na Web Semântica. Uma linguagem suportada pelo W3C é a Ontology Web Language 1.1 (OWL), correspondendo à linguagem de descrição $s\mathcal{ROIQ}$.

$$
\begin{array}{l}
Pessoa \sqsubseteq SerVivo \\
Pessoa \equiv Homem \sqcup Mulher \\
Homem \sqsubseteq \neg Mulher \\
M\tilde{a}e \equiv Mulher \sqcap progenitor.Pessoa \\
\top \;\equiv\; (\geq 1\; progenitor^{-}.Homem) \sqcap (\leq 1\; progenitor^{-}.Homem) \\
\top \;\equiv\; (\geq 1\; progenitor^{-}.Mulher) \sqcap (\leq 1\; progenitor^{-}.Mulher) \\
progenitor \sqsubseteq antecessor \\
progenitor \circ antecessor \sqsubseteq antecessor
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
carlos : Homem \\
paula : Mulher \\
(carlos, rita) : progenitor \\
(paula, rita) : progenitor
\end{array}
$$

Interacção com KBs em LPO

Suponhamos que um agente do mundo do Wumpus recorre a uma KB em LPO e percepciona um cheiro e uma brisa (mas não uma cintilação) em $t = 5$:

$Tell(KB, Percept([Smell, Breeze, None], 5))$
$Ask(KB, \exists\, a \;\; BestAction(a, 5))$

I.e., Será que a KB conclui alguma acção particular para $t = 5$?

Resposta: Yes, $\{a/Shoot\}$ $\leftarrow$ substituição (binding list)

Dada uma frase S e a substituição σ,
$S\sigma$ denota o resultado aplicar σ a S; e.g.,
$S = MaisInteligente(x, y)$
$\sigma = \{x/Hillary, y/Bill\}$
$S\sigma = MaisInteligente(Hillary, Bill)$

$Ask(KB, S)$ devolve alguns/todos os σ tal que $KB \models S\sigma$

Base de conh. para o mundo do Wumpus

"Percepção"

$\forall\, b, g, t \;\; Percept([Smell, b, g], t) \;\Rightarrow\; Smelt(t)$

$\forall\, s, b, t \;\; Percept([s, b, Glitter], t) \;\Rightarrow\; AtGold(t)$

Reflexos: $\forall\, t \;\; AtGold(t) \;\Rightarrow\; BestAction(Grab, t)$

Reflexos com estado interno: já temos o ouro?

$\forall\, t \;\; AtGold(t) \wedge \neg Holding(Gold, t) \;\Rightarrow\; BestAction(Grab, t)$

$Holding(Gold, t)$ não pode ser observado

$\Rightarrow$ manter as alterações é essencial

Dedução de propriedades invisíveis

Propriedades das posições:
$\forall\, x, t \;\; At(Agent, x, t) \land Smelt(t) \;\Rightarrow\; Smelly(x)$
$\forall\, x, t \;\; At(Agent, x, t) \land Breeze(t) \;\Rightarrow\; Breezy(x)$

Casas são ventosas ao pé de um buraco:

Regra de diagnóstico —inferir causa a partir do efeito

$$\forall\, y \;\; Breezy(y) \;\Rightarrow\; \exists\, x \;\; Pit(x) \land Adjacent(x, y)$$

Regra causal —inferir efeitos a partir das causas

$$\forall\, x, y \;\; Pit(x) \land Adjacent(x, y) \;\Rightarrow\; Breezy(y)$$

Nenhuma delas é completa—e.g., a regra causal não diz como casas longe dos buracos podem ser ventosas

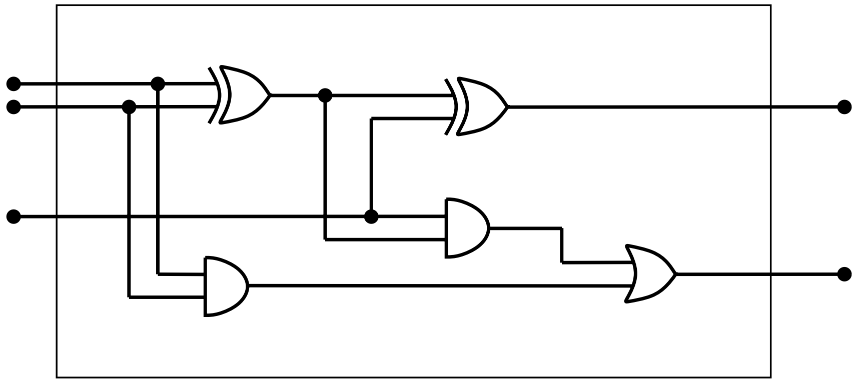
Definição para o predicado $Breezy$:

$$\forall\, y \;\; Breezy(y) \;\Leftrightarrow\; [\exists\, x \;\; Pit(x) \land Adjacent(x, y)]$$

Engenharia de Conhecimento em LPO

1. Identificar a tarefa
2. Obter o conhecimento relevante
3. Decidir qual o vocabulário: predicados, funções e constantes
4. Codificar conhecimento genérico acerca do domínio
5. Codificar uma instância concreta
6. Interrogar a teoria utilizando um motor de inferência
7. Depurar a base de conhecimento

Circuitos digitais



Vocabulário

Objectos : A_1, A_2, X_1, X_2, O_1, C_1, 0, 1, 2, 3, OR, AND, XOR, NOT.

Funções : $Sinal/1$, $Type/1$, $In/2$ e $Out/2$.

Predicados : $Ligado/2$.

Modelação de um circuito digital

◇ Conhecimento genérico sobre o domínio – ligações:

1. Se dois terminais estão ligados então têm o mesmo sinal:

$$\forall t_1 \forall t_2 \; Ligado(t_1, t_2) \; \Rightarrow \; Sinal(t_1) = Sinal(t_2)$$

2. O sinal para todo o terminal ou é 0 ou 1 (mas não ambos)

$$\forall_t \; Sinal(t) = 0 \vee Sinal(t) = 1$$
$$1 \neq 0$$

3. O predicado $Ligado$ é comutativo

$$\forall t_1 \forall t_2 \; Ligado(t_1, t_2) \equiv Ligado(t_2, t_1)$$

Modelação de um circuito digital

◊ Conhecimento genérico sobre o domínio – portas:

1. A saída de uma porta OR é 1 sse pelo menos uma das suas entradas é 1

$$\forall_g \; Type(g) = OR \;\Rightarrow\; (Sinal(Out(1,g)) = 1 \equiv \exists_n Sinal(In(n,g)) = 1)$$

2. A saída de uma porta AND é 0 sse pelo menos uma das entradas é 0

$$\forall_g \; Type(g) = AND \;\Rightarrow\; (Sinal(Out(1,g)) = 0 \equiv \exists_n Sinal(In(n,g)) = 0)$$

3. A saída de uma porta XOR é 1 sse as suas duas entradas são diferentes

$$\forall_g \; Type(g) = XOR \;\Rightarrow\; (Sinal(Out(1,g)) = 1 \equiv Sinal(In(1,g)) \neq Sinal(In(2,g)))$$

4. A saída de uma porta NOT é diferente da sua entrada:

$$\forall_g \; Type(g) = NOT \;\Rightarrow\; (Sinal(Out(1,g)) \neq Sinal(In(1,g)))$$

Modelação de um circuito digital

◊ Codificação da instância

Portas existentes:

$$Type(X_1) = XOR \;\; Type(X_2) = XOR$$
$$Type(A_1) = AND \;\; Type(A_2) = AND \;\; Type(O_1) = OR$$

Ligações entre os componentes:

$$\begin{array}{ll}
Ligado(Out(1, X_1), In(1, X_2)) & Ligado(In(1, C_1), In(1, X_1)) \\
Ligado(Out(1, X_1), In(2, A_2)) & Ligado(In(1, C_1), In(1, A_1)) \\
Ligado(Out(1, A_1), In(1, O_1)) & Ligado(In(2, C_1), In(2, X_1)) \\
Ligado(Out(1, A_2), In(2, O_1)) & Ligado(In(2, C_1), In(2, A_1)) \\
Ligado(Out(1, X_2), Out(1, C_1)) & Ligado(In(3, C_1), In(2, X_2)) \\
Ligado(Out(1, O_1), Out(2, C_1)) & Ligado(In(3, C_1), In(1, A_2))
\end{array}$$

Interrogações à teoria

♢ Saber quais os valores de input necessários para se ter a primeira saída a 0 e a segunda saída a 1 ?

$$Signal(In(1, C_1)) = i_1 \land Signal(In(2, C_1)) = i_2 \land Signal(In(3, C_1)) = i_3$$
$$\land$$
$$Signal(Out(1, C_1)) = 0 \land Signal(Out(2, C_2)) = 1$$

♢ Obter a tabela de entrada-saída para o circuito:

$$Signal(In(1, C_1)) = i_1 \land Signal(In(2, C_1)) = i_2 \land Signal(In(3, C_1)) = i_3$$
$$\land$$
$$Signal(Out(1, C_1)) = o_1 \land Signal(Out(2, C_2)) = o_2$$

Nota: Pode-se generalizar a modelação para efectuar diagnóstico: sabendo quais os valores de entrada e saída determinar quais os circuitos que se encontram avariados (e quais as suas falhas).

Sumário

◇ Lógica de Primeira Ordem:
  – objectos e relações são primitivas semânticas
  – sintaxe: constantes, funções, predicados, igualdade, quantificadores

◇ Maior poder expressivo: suficiente para definir o mundo do Wumpus e circuitos electrónicos.

◇ Apesar da sua expressividade existem limitações inerentes que não são ultrapassáveis.

◇ Teoremas meta-lógicos fornecem resultados fundamentias para toda a Matemática e Informática.

◇ Raciocínio em Lógica de Primeira Ordem é indecidível.

◇ Estão a ser activamente estudados fragmentos decidíveis e suficientemente expressivos para representar conhecimento ontológico.